

# Proposal of an Optimality Theory and Its Application to Some Mechanical Problems(一つの最適性理論の提案とその力学問題への応用)

著者	新関 茂
号	1193
発行年	1990
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10097/10000">http://hdl.handle.net/10097/10000</a>

氏 名	新 関 茂
授 与 学 位	工 学 博 士
学位授与年月日	平成 3 年 2 月 13 日
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 2 項
最 終 学 歴	昭 和 45 年 3 月 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻 修士課程修了
学 位 論 文 題 目	Proposal of an Optimality Theory and Its Application to Some Mechanical Problems (一つの最適性理論の提案とその力学問題への応用)
論 文 審 査 委 員	東北大学教授 佐武 正雄    東北大学教授 倉西 茂 東北大学教授 柳沢 栄司    東北大学教授 和泉 正哲

## 論 文 内 容 要 旨

### 第 1 章 緒 論

現在、電子計算機を用いた数値計算によって、大規模な土木構造物の設計や工事中の地下構造物の力学的挙動の予測が、頻繁に行われるようになってきている。しかしながら、代表的土木材料である土、コンクリート、岩石及び岩盤は、非線形で非平衡（不可逆）な力学挙動を示すため、数値計算に用いる構成関係式の体系的確立が容易ではなく、土木構造物の正確な挙動の予測の大きな障害となっている。また、上記のような土木材料の非線形で非平衡な力学挙動を記述する構成関係式の研究の歴史はあさく、現在、上述のような土木材料における構成関係式の研究に関して、幾つかの問題点や混乱が認識されている。このような問題の解決は現象の非線形な非平衡性のため容易ではないが、忘れられることがなく懸案問題となっている基本的事項がいくつか存在する。このような懸案問題のうちで本論文中で研究が行われたものには、次のようなものがある。

- (1) 金属材料に対して、Drucker 等によって提案された最大塑性仕事原理は地盤材料に適用可能なのか？
- (2) 地盤材料では応力テルソンと歪増分テルソンの主軸は、一致するのかもしれないのか？
- (3) Rowe が砂のストレス・ダイレイタンシー式を導くときに用いたエネルギー比最小の原理は、証明可能なのか、また、この力学原理は他の変分原理とどのような関係にあるのか？

- (4) 松岡と中江が、砂のストレス・ダイレイタンスー式に関する実験データの整理中に見出した空間滑動面 (spacial mobilized plane : SMP) の理論的基礎はどうか？
- (5) 粒状体における主要な微視的変形機構には、内部摩擦角を  $\phi$ 、粒子間内部摩擦角を  $\phi_u$  で表した場合、最大圧縮応力の方向から  $\pi/4 + \phi/2$  (村山) 又は  $\pi/4 + \phi_u/2$  (Rowe) の方向に法線ベクトルをもつ面上で最も活発にせん断活動が生じるとする2つの説があり混乱している。
- (6) クラックの発生及び進展に関する主要な破壊規準には、最大応力規準、最大エネルギー解放率規準及び最小歪エネルギー密度規準があり混乱している。また、これらのいずれの破壊規準もクラック・パターン形成の予測には適用できない。

上記のような懸案問題の存在により、何を基礎として構成関係式の研究やクラックの発生・進展の解析を行うべきかについて、疑問をもったこと及びこれらの問題の大部分は直接または間接的に非平衡過程における最大・最小の問題と関連していると考えたことが本論文における研究の出発点であることなどが記されている。

## 第2章 既往の研究

本章は、本論文中の第3、4、5章における研究と直接関連した非平衡熱力学、変分原理、粒状体の力学及び破壊力学に関する既往の研究の概要を簡単に述べたものである。

## 第3章 非線形非平衡系における最適性理論の提案

本章においては、安定性の定義を基礎とし、熱力学第1及び第2法則と自然界に存在するゆらぎ現象を用いて、非線形非平衡系における一般的な安定条件が定式化され、この安定条件に基づいて一般的な最適性理論の提案が行われる。次に、この安定条件及び最適性理論より、逆に、熱力学第1及び第2法則とゆらぎを導びき、この理論と熱力学第1及び第2法則とゆらぎは、必要十分の関係にあることが示される。また、この理論の検証として、従来の理論及び自然現象との比較が行われ、電気回路網における最小発熱の定理、Prigogineの最小エントロピー生成率の定理、Drucker等の最大塑性仕事の原理、GlansdorffとPrigogineの安定条件などが容易に導かれることなどが示される。ここで提案された最適性理論の特徴は、定式化の過程から明らかなように、安定な状態にある任意の材料における現象に対して、熱力学第1及び第2法則と同様に適用可能なこと及び安定条件及び最適性の理論は、熱力学第1法則及びエントロピー生成率に関する公式と対応した形式で表現されているので、種々の問題への応用が非常に容易なことである。

## 第4章 粒状体の力学への応用

粘着力のない砂のような粒状体の力学は、土の力学において最も基本的なものであり、粒子レベルからの砂の構成関係式の体系的定式化は重要問題となっている。粒子レベルからの連続体モデルの理論的構成は、本質的には統計物理学に属する問題であるが、非線形非平衡現象における統計物理学は、まだ、ごく初期の段階にあり、粒状体に応用できる理論が存在しないため、通常、砂の

ような粒状体の構成関係式の研究には、実験的な方法が用いられることが多い。しかし、本章では、粒子レベルから、粒状体の構成関係式を定式化するための基礎として、第3章で提案した最適性理論を含む一般的物理法則、粒子間の迂りを支配する摩擦法則及び幾何学的条件の3つを基礎として、理論的観点から、懸念問題を避けることなく、粒子レベルからの粒状体の構成方程式の定式化が行われている。まず、初めに、任意のセン断面上の2粒子間の平衡条件式を導びき、応力などの物理量の平均値を導入することにより、粒子集合体に関する平衡条件に拡張される。次に、同様に任意のセン断面上及び主歪増分で表現された2粒子間の適合条件及び粒子集合体に対する適合条件が求められる。ストレス・ダイレイタンス式の定式化には、応力テルソルと歪増分テルソルの主軸の関係が必要であるため、第3章で提案した最適性理論（外的仕事の最大性）を用いてこの関係が考案され、これらのテルソルは共軸でなければならないことが示される。次に、任意のセン断面上の粒子集合体に関する適合条件を平衡条件に代入し、第3章で提案した最適性理論を適用し、平衡条件及び適合条件は、 $[\tau/\sigma_n]_{\max}(\sigma_n, \tau)$ は任意のセン断面上の垂直及びセン断応力）面上に関するものでなければならないことが示され、この条件を用いることにより、 $[\tau/\sigma_n]_{\max}$ 面上の2次元（平面歪）状態のストレス・ダイレイタンス式が定式化される。同様に、 $[\tau/\sigma_n]_{\max}$ 面上に内部摩擦角と主応力を用いて表現された平衡条件と主歪増分で表現された適合条件に対して、応力テルソルと歪増分テルソルの共軸性とエネルギー増分に関する応力と歪増分の共役性を考慮し、第3章で提案した最適性理論から Rowe のエネルギー比最小の原理を導き、これを用いることにより、2次元（平面歪）状態の主応力面に関するストレス・ダイレイタンス式が定式化される。上記の共に  $[\tau/\sigma_n]_{\max}$  面上の平衡条件を用いた2つストレス・ダイレイタンス式の定式化は、村山と Rowe の微視的変形機構の統一を意味する。

次に、 $[\tau/\sigma_n]_{\max}$  面上の2次元状態のストレス・ダイレイタンス式を3次元状態に拡張するために、応力空間と応力比空間の法線ベクトルの変換である N-変換とセン断滑動率ベクトルを新たに導入し、空間滑動面を理論的に導き、この空間滑動面上の垂直及びセン断応力を用いて、3次元状態のストレス・ダイレイタンス式が表現される。次に、微視的な観点から、歪硬化機構を解析し、この解析結果と第3章で提案した最適性理論から導かれる非平衡過程における最大エントロピー原理を用いて、セン断滑動に対するポテンシャル障壁の高さの分布を表す確立密度関数を求め、歪硬化則が定式化される。また、上述のストレス・ダイレイタンス式及び歪硬化則は実験データと良く一致することが示される。

## 第5章 破壊力学への応用

コンクリートや岩石などの破壊と劣化は、微視的及び巨視的クラックの発生・成長と密接に関連している。本章では、第3章で提案した理論は最適性理論であると共に安定性理論であるので、この理論の応用により粘弾塑性体中のクラックの進展に関する一般的な破壊規準及び安定条件の定式化が行われる。この破壊規準及び安定条件は、第3章で提案した理論を粘弾塑性体中のクラックを対象として書き換えたものであるため、第3章の理論とほとんど同様な特徴を有している。また、等方非線形弾性体にたいしてはこの破壊規準と安定条件は、従来の最大エネルギー解放率規準およ

び Paris 等によって提案されたティアリング・モジュラスによる安定条件と一致することが示される。次に、この破壊規準を応用し、モルタル供試体中の初期欠陥から生じるクラックの発生・成長過程が、クラックを有限要素の境界によって表現することによって解析されている。この有限要素解析で荷重とクラックの関係が実験結果と一致するようにモルタルの破壊靱性値を選んだ場合、この破壊靱性値は、実験から求められた値より非常に小さな値となる。この両者の値のくい違いを説明するために、モルタル内のクラック進展中の AE 位置標定結果、コンクリート中の骨材近傍のボンドクラックやモンタルクラックの発生・成長の実験観察結果及び花崗岩中のクラック進展の観察結果を参考にして、3次元破壊進行領域のモデルの構成が行われる。このモデルでは、巨視的なクラックは、骨材表面のボンド・クラックとマトリックス・クラックを連結するように成長し、微視的クラックは、巨視的クラックから最も近い骨材に発生するボンド・クラックだけから構成されるものとして、モンタルの破壊靱性値が評価されている。実験から求められたモンタルの破壊靱性値には相当のバラツキがあるが、上述のモデルによって求められた破壊靱性値は、このバラツキ内のどちらかと言えば小さい方の値となっているが、妥当な範囲に入っているものと考えられる。次に、上述の破壊規準を応用し、従来の破壊規準では予測できない干潟や玄武岩中の六角形クラック・パターンや熔接球形水素タンクの爆発時のクラック・パターンが解析される。上述の破壊規準によれば、最も高い確率で実現するクラック・パターンは、許容されるもののうちでクラック・パターンの形成によって消費されるエネルギーが最小で、クラック・パターンの形成に対して供給可能なエネルギーが最大となるものである。この条件によって選ばれる最も実現確率の高いクラック・パターンは、等方で一様な領域がかなり広い場合には六角形であり、また、等方的で一様な領域が熔接などにより、比較的狭い範囲に限定される球形水素タンクでは、1点で3本のクラックが交差するものであることが示される。

## 第6章 結 論

本章は、初めに説明した懸念問題の解決を含む本論文での研究によって得られた知見の要約である。

## 審 査 結 果 の 要 旨

材料の力学挙動について最適性を解析する場合、熱力学の法則に基づいて考察することが必要となることが多い。しかし、工学的問題の解明において、このような考察や解析手法は、未だ十分に確立されていない。本論文は、この点に着目し、微小なゆらぎがあっても熱力学の基本法則が成立するという考えの下に、一つの新しい条件式を導き、この最適性理論のもつ意味や適用性について考察するとともに、粒状体力学の問題やき裂の進展解析に応用して新しい知見を得たもので、全編6章よりなる。

第1章は緒論であり、本論文の背景について述べている。

第2章は非平衡熱力学、変分理論及び粒状体力学、破壊力学について、関係する従来の研究を要約するとともに、本論文の着目点を示している。

第3章では、まず本論文で提案する条件式の誘導を説明している。すなわち、熱力学の第1、第2法則がゆらぎやある微視的な変化に対しても成立するとすることによって、一つの新しい安定条件が導かれることを示し、さらに、それに基づく最適性理論について説明し、この理論が従来の多くの理論を統一した形となっていることを述べている。

第4章は、粒状体力学への応用について述べている。粒状体力学の一つの基礎式であるロウの応力・ダイレイタンシィ式について、その基礎となっているエネルギー比最小の法則が提案の理論によって導かれることを示し、さらに、その3次元への拡張についても、実験値とよく適合する関係式が得られることを説明している。これらは新しい知見である。

第5章では、破壊力学において重要なき裂の進展解析について、本理論の応用を述べている。すなわち、本理論による破壊規準がき裂進展に関する従来の最大エネルギー解放率規準の一般化となっていることを示し、また、き裂の進展過程を解析する一つの新しいモデルについて説明している。さらに、き裂パターンの形成についても、実際のパターンが本理論によってよく説明できることを示している。これらは重要な知見と考えられる。

第6章は結論である。

以上、要するに本論文は、熱力学の法則を基礎として、材料の挙動解析に有用な新しい最適性理論を提案し、力学問題に応用して多くの重要な知見を得たもので、材料力学、土木工学の発展に寄与する処が少なくない。

よって、本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。